# Une justification de la conjecture de Syracuse

Gilles Louïse

Paris, février 2024

## 1 Définition

À partir de tout nombre entier strictement positif :

— s'il est pair, on le divise par 2 ;

— s'il est impair, on le multiplie par 3 et on lui ajoute une unité.

On obtient ainsi un autre nombre. On le réinjecte au même processus.

En poursuivant indéfiniment de cette manière, la conjecture prédit qu'on en arrive au nombre 1.

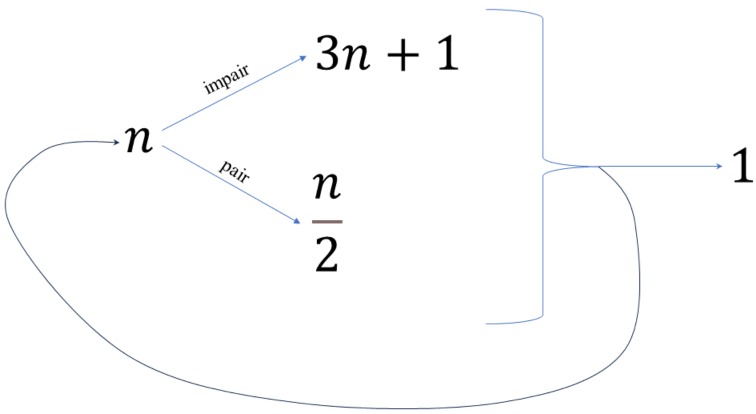


Figure 1 – Processus syracusien

## 2 Tout successeur est unique

Du point de vue des prédécesseurs impairs, soient deux nombres impairs $i$ et $i'$ :

$$i = i' \Rightarrow 3i + 1 = 3i' + 1$$

Ce qui signifie que deux nombres impairs égaux ont des successeurs égaux.

C'est évident puisqu'à partir de $i = i'$, on pourra multiplier par 3 de part et d'autre, puis ajouter une unité de part et d'autre :

$$i = i' \Rightarrow 3i = 3i' \Rightarrow 3i + 1 = 3i' + 1$$

Du point de vue des prédécesseurs pairs, soient deux nombres pairs $p$ et $p'$ :

$$p = p' \Rightarrow \frac{p}{2} = \frac{p'}{2}$$

Ce qui signifie que deux nombres pairs égaux ont des successeurs égaux. C'est également évident puisqu'à partir de $p = p'$, il est possible de diviser par 2 de part et d'autre.

Et d'une manière générale, soient $p$ et $p'$ deux prédécesseurs :

$$p = p' \Rightarrow s = s'$$

Ce qui signifie que deux prédécesseurs égaux ont des successeurs égaux. Et réciproquement par contraposée :

$$s \neq s' \Rightarrow p \neq p'$$

Ce qui signifie que deux successeurs différents ont des prédécesseurs différents.

## 3 $3n + 1$ est pair si $n$ est impair

On constate que $3n + 1$ est pair si $n$ est impair. On remplace par exemple la variable $n$ par l'expression générale d'un nombre impair $2k + 1$, ce qui donne $6k + 4$ qui est pair.

Il en résulte qu'on pourra diviser le nombre $3n + 1$ au moins une fois par 2. Cela dit, une fois divisé par 2, ce nombre pourra être de nouveau pair et donc être de nouveau divisé par 2. On peut donc simplifier cette écriture en précisant qu'on divisera $3n+1$ par 2 autant de fois qu'il le faudra pour qu'il devienne impair. Si le nombre choisi au début d'une boucle syracusienne est pair, il suffira de le diviser également par 2 autant de fois qu'il le faudra pour qu'il devienne impair.

Il en résulte que ce problème ne concerne en réalité que les nombres impairs.

Le processus peut se décrire ainsi : à partir de tout nombre impair, on le multiplie par 3 et on lui ajoute une unité, puis on le divise par 2 autant de fois qu'il le faudra pour qu'il redevienne impair. Ce nouveau nombre impair est réinjecté au même calcul. En poursuivant indéfiniment de cette manière, la conjecture prédit qu'on en arrive au nombre 1.

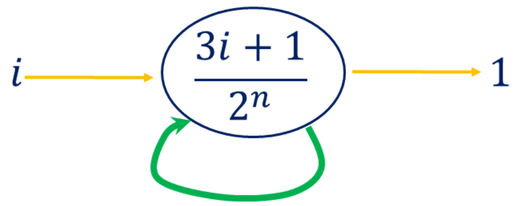


FIGURE 2 – Processus syracusien simplifié n'utilisant que les nombres impairs

Dans ce schéma, il va sans dire que l'exposant $n$ de 2 est suceptible de changer à chaque occurrence, il s'agit d'un dessin symbolique pour décrire le mécanisme syracusien n'utilisant que les nombres impairs. Ce nombre $n$ est d'ailleurs l'exposant du nombre premier 2 dans la décomposition en facteurs premiers du nombre pair $3i + 1$, sachant que diviser $n$ fois par 2 revient à diviser par $2^n$.

## 4 Exemple : série des impairs à partir de 7

$$7 \times 3 + 1 = 22 \qquad \frac{22}{2} = 11$$

$$11 \times 3 + 1 = 34 \qquad \frac{34}{2} = 17$$

$$17 \times 3 + 1 = 52 \qquad \frac{52}{2} = 26 \qquad \frac{26}{2} = 13$$

$$13 \times 3 + 1 = 40 \qquad \frac{40}{2} = 20 \qquad \frac{20}{2} = 10 \qquad \frac{10}{2} = 5$$

$$5 \times 3 + 1 = 16 \qquad \frac{16}{2} = 8 \qquad \frac{8}{2} = 4 \qquad \frac{4}{2} = 2 \qquad \frac{2}{1} = 1$$

La série des nombres impairs pour le nombre impair de départ 7 est donc : 7, 11, 17, 13, 5, 1.

## 5 Fonction réciproque de $\frac{3i+1}{2^n}$

La fonction réciproque de $\frac{3i+1}{2^n}$ est $\frac{i2^n-1}{3}$. En effet,

$$3(\frac{i2^n - 1}{3}) + 1 = i2^n - 1 + 1 = i2^n$$

soit $i$ après les $n$ divisions par 2.

Donc l'unique successeur impair de tout nombre impair $i$ est de la forme

$$\frac{3i+1}{2^n}$$

et tout prédécesseur impair de $i$ est de la forme

$$\frac{i2^n - 1}{3}$$

Dans un sens on a :

$$i \to \frac{3i+1}{2^n}$$

et dans l'autre :

$$\frac{i2^n - 1}{3} \leftarrow i$$

On voit que ce prédécesseur impair n'est possible que si $i$ n'est pas divisible par 3. En effet, les nombres impairs divisibles par 3 n'ont pas de prédécesseurs impairs, ils ne peuvent se situer qu'en premier dans une série syracusienne qui n'utilise que les nombres impairs.

La raison en est que partant d'un nombre impair $i$ quelconque, la moulinette syracusienne $3i + 1$ rend le nombre non divisible par 3, et les nombres impairs suivants resteront non divisibles par 3 car les divisions par 2 que ce nombre subira dans le calcul, ne rendront pas ce nombre divisible par 3.

Multiplier ou diviser par le nombre premier 2, et d'une manière générale par un nombre premier $p$ quelconque, ne touche que l'exposant de ce nombre premier dans la décomposition en facteurs premiers, ce qui fait que les autres divisibilités ou non-divisibilités se maintiennent telles quelles.

La seule chose qui peut arriver quand on divise un nombre pair par 2 est que ce nombre cesse d'être pair. Donc après la première moulinette syracusienne $3n+1$, le nombre devient définitivement non divisible par 3.

Il en résulte que seul le premier nombre impair d'une série syracusienne pourra être divisible par 3, ce premier nombre impair est quelconque, il peut être divisible par

3 ou non divisible par 3.

Tous les nombres suivants sont des nombres impairs non divisibles par 3 donc de la forme $3i \pm 1$, et plus précisément de la forme $6i \pm 1$, car les nombres de la forme $3i \pm 1$ peuvent être pairs. Comme on ne travaille désormais qu'avec des nombres impairs, tous les nombres impairs suivants seront de la forme $6i \pm 1$ car les nombres entiers de la forme $6i \pm 1$ ont les deux caractéristiques souhaitées : ils sont à la fois impairs et non divisibles par 3.

Il en résulte que les prédécesseurs de $6a \pm 1$ sont de la forme
$$\frac{(6a \pm 1)2^n - 1}{3}$$
En effet, puisque les précédesseurs impairs de $i$ sont de la forme $\frac{i2^n-1}{3}$ (fonction réciproque de $\frac{3i+1}{2^n}$) et que le successeur impair de $i$ est de la forme $6a \pm 1$, on remplace simplement $i$ par $6a \pm 1$ pour obtenir la formule générale.

On distingue deux cas : les prédécesseurs de $6a - 1$ qui sont de la forme
$$\frac{(6a - 1)2^n - 1}{3}$$
et les prédécesseurs de $6a + 1$ qui sont la forme
$$\frac{(6a + 1)2^n - 1}{3}$$
sous couvert de divisibilité par 3 car ce ne sont là pour l'instant que des formes générales.

## 6 Suite de prédécesseurs

On démontre par récurrence que si $i2^n - 1$ est divisible par 3, $i2^{n+2} - 1$ est aussi divisible par 3, ce qui signifie que dans la suite des formules du type $\frac{i2^n-1}{3}$ obtenue par incrémentations successives de l'exposant $n$, seule une formule sur deux se maintiendra valide du fait d'un numérateur divisible par 3. On évitera $n = 0$ pour avoir une vraie puissance de 2.

Dans la pratique, on essaie $n = 1$ : si le nombre est divisible par 3, alors la formule sera correcte pour tout exposant impair ; sinon la formule sera correcte pour tout exposant pair non nul.

Si l'exposant doit être pair, la vraie formule sera du type

$$\frac{i2^{2n} - 1}{3}$$

S'il doit être impair, la formule sera du type

$$\frac{i2^{2n+1} - 1}{3}$$

## 7 Prédécesseurs des nombres de la forme $6a \pm 1$

On a vu que les prédécesseurs de $6a \pm 1$ sont de la forme $\frac{(6a\pm1)2^n-1}{3}$.

On démontre que si le nombre est de la forme $6a + 1$, l'exposant de 2 doit être pair pour que le numérateur soit divisible par 3, ce qui donne $\frac{(6a+1)2^{2n}-1}{3}$ avec $n > 1$ si $a = 0$, sinon $n > 0$ ;

et si le nombre est de la forme $6a - 1$, l'exposant de 2 doit être impair pour que le numérateur soit divisible par 3, ce qui donne $\frac{(6a-1)2^{2n+1}-1}{3}$ avec $a > 0$ pour éviter un nombre négatif.

Si $a = 0$, $6a + 1 = 1$, l'exposant de la puissance de 2 doit alors être supérieur à 1 car s'il est égal à 1, le résultat donne 1, 1 étant le prédécesseur de 1.

$$\frac{(6(0)+1)2^{2(1)}-1}{3} = \frac{(1)2^2-1}{3} = \frac{4-1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

C'est le seul cas où successeur et prédécesseur coïncident, la fameuse boucle infinie 1—1, plus connue sous la forme 4—2—1 quand on fait intervenir les nombres pairs.

On affine ainsi la formule précédente $\frac{(6a\pm1)2^n-1}{3}$ qui n'est pas toujours vraie étant donné que le numérateur n'est pas toujours divisible par 3, c'est une formule générale sous couvert de divisibilité par 3 du numérateur.

Après cette amélioration, la nouvelle formule est maintenant parfaite : les prédécesseurs de $6a + 1$ sont de la forme

$$\frac{(6a+1)2^{2n}-1}{3}$$

(exposant pair de la puissance de 2) avec $n > 1$ si $a = 0$, sinon $n > 0$ ; et les prédécesseurs de $6a - 1$ sont de la forme

$$\frac{(6a-1)2^{2n+1}-1}{3}$$

(exposant impair de la puissance de 2) avec $a > 0$ pour éviter un nombre négatif.

## 8 Une démonstration par récurrence

Avant de continuer, nous allons constater que si $i$ est un nombre entier quelconque,

$$i2^n - 1|3 \Rightarrow i2^{n+2} - 1|3 \; avec \; n \neq 0.$$

Nous utilisons la lettre $i$ parce que dans ce qui suit, ce sera un nombre impair, mais la formule s'avère pour tout nombre entier, pair ou impair.

Cela signifie que si un nombre entier quelconque multiplié par une puissance de 2, le tout décrémenté, est divisible par 3, la divisibilité par 3 sera assurée pour tout autre exposant de la puissance de 2 de la même parité.

Si la formule est vérifiée pour un exposant impair, elle le sera pour tous les exposants impairs donc de la forme $2n + 1$ ; et si elle est vérifiée pour un exposant pair, elle le sera pour tous les exposants pairs donc de la forme $2n$.

Dans la pratique, on essaie de voir si ça marche pour $n = 1$, auquel cas la formule est vérifée pour tout exposant impair de la puissance de 2, sinon elle sera vérifiée pour pour tout exposant pair de la puissance de 2.

Cela vient du fait qu'ajouter 2 à l'exposant d'une puissance de 2 revient à multiplier par 4 et que 4=3+1.

On voit que $i$ doit être non divisible par 3 sinon $i2^n$ sera divisible par 3 et $i2^n - 1$ non divisible par 3. La variable $i$ est donc de la forme $3n \pm 1$.

Comme il y a deux variables, on peut scinder la démonstration en deux démonstrations par récurrence, une première où l'exposant de la puissance de 2 reste fixe, on ne fait mouvoir que la variable $n$ de $3n \pm 1$ ; et la seconde où l'on ne fait mouvoir que l'exposant de la puissance de 2, le coefficient de la puissance de 2 restant fixe.

Montrons en premier lieu que

$$(3a+1)2^n - 1|3 \Rightarrow [3(a+1)+1]2^n - 1|3$$

c'est-à-dire que si la formule est vraie pour $a$, elle est vraie pour $a+1$.

On constate que la formule est vraie pour $a = 0$ et $n = 2$. La variable $n$ doit être supérieure à 0 pour qu'il y ait une vraie puissance de 2, ça ne marche pas pour $n = 1$ mais ça marche pour $n = 2$.

$$[3(0)+1]2^2 - 1 = (1)2^2 - 1 = 4 - 1|3$$

Ici $n$ ne bougera pas mais il est important de montrer qu'il existe une petite valeur de $n$ qui valide ce type de formule. Un point de départ valide étant trouvé, montrons que la formule avec $a+1$ sera bien divisible par 3 en prenant pour hypothèse que la formule avec $a$ tout court l'est.

$$
\begin{aligned}
&[3(a+1)+1]2^n-1\\
&=(3a+3+1)2^n-1\\
&=[(3a+1)+3]2^n-1\\
&=(3a+1)2^n+(3)2^n-1\\
&=(3)2^n+(3a+1)2^n-1
\end{aligned}
$$

On met ici en évidence l'addition de deux fragments disivibles par 3,

d'une part $(3)2^n$

et d'autre part $(3a+1)2^n-1$ divisible par 3 par hypothèse.

La somme de deux nombres divisibles par 3 est divisible par 3 donc $[3(a+1)+1]2^n-1|3$.

Quod erat demonstrandum.

La formule avec $3a-1$ se démontre de la même manière.

$$(3a-1)2^n-1|3 \Rightarrow [3(a+1)-1]2^n-1|3$$

Ici, $a$ ne peut pas être égal à 0 sinon $3a-1$ serait négatif, donc on choisit $a=1$. La variable $n$ ne pouvant pas être nulle, on constate que la formule est divisible par 3 pour $n=1$.

$$[3(1)-1]2^1-1=(3-1)2-1=(2)2-1=4-1|3$$

On établit la divisibilité par 3 en remplaçant $a$ par $a+1$.

$$[3(a+1)-1]2^n-1$$
$$=(3a+3-1)2^n-1$$
$$=[(3a-1)+3]2^n-1$$
$$=(3a-1)2^n+(3)2^n-1$$
$$=(3)2^n+(3a-1)2^n-1$$

On obtient bien deux fragments divisibles par 3,

d'une part $(3)2^n$

et d'autre part $(3a-1)2^n-1$ divisible par 3 par hypothèse.

On voit donc que la formule est vraie avec $3a+1$ et $3a-1$ en faisant évoluer $a$ vers $a+1$.

On peut maintenant oublier le coefficient de $2^n$ et l'appeler simplement $i$ dans la mesure où de petites valeurs ont confirmé ce type de formule.

Faisons évoluer seulement l'exposant de la puissance de 2 et montrons que

$$i2^n-1|3 \Rightarrow i2^{n+2}-1|3$$

En effet,

$$i2^{n+2}-1=i2^n2^2-1$$

$$=i2^n4-1$$

$$=i2^n(3+1)-1$$

$$= (3)i2^n + i2^n - 1$$

mettant en évidence encore une fois deux nombres divisibles par 3,

d'une part $(3)i2^n$,

et d'autre part $i2^n - 1$ (divisible par 3 par hypothèse), dont la somme est donc divisible par 3 d'où $i2^{n+2} - 1|3$. Quod erat demonstrandum.

## 9 Vérification des formules particulières

Constatons maintenant la validité des deux formules issues de $\frac{(6a\pm1)2^n-1}{3}$, l'important étant que les divisibilités par 3 soient toujours assurées.

Commençons par $\frac{(6a+1)2^{2n}-1}{3}$. Rappelons que l'exposant de 2 doit être pair pour la formule avec $6a + 1$ et que $n > 1$ pour $a = 0$ (pour éviter d'obtenir 1), sinon $n > 0$ pour avoir une vraie puissance de 2.

Vérifions que la formule est calculable pour $n = 1$ c'est-à-dire que le numérateur est bien divisible par 3 dans ce cas-là.

$$(6a + 1)2^{2(1)} - 1 = (6a + 1)2^2 - 1$$

$$= (6a + 1)4 - 1$$

$$= (24a + 4) - 1$$

$$= 24a + 4 - 1$$

$$= 24a + 3|3$$

Comme la formule est vraie pour $n = 1$ et que

$$i2^n - 1|3 \Rightarrow i2^{n+2} - 1|3$$

il en résulte que la formule $\frac{(6a+1)2^{2n}-1}{3}$ est vraie pour tout $n$ non nul car l'exposant de 2, ici pair, se maintient dans la même parité.

Vérifions maintenant la formule $\frac{(6a-1)2^{2n+1}-1}{3}$. Rappelons que l'exposant de 2 doit être impair pour la formule avec $6a - 1$.

Vérifions que la formule est calculable pour $n = 0$ c'est-à-dire que le numérateur est bien divisible par 3 dans ce cas-là.

$$(6a - 1)2^{2(0)+1} - 1 = (6a - 1)2^1 - 1$$

$$= (6a - 1)2 - 1$$

$$= (12a - 2) - 1$$

$$= 12a - 2 - 1$$

$$= 12a - 3|3$$

Comme la formule est vraie pour $n = 0$ et que

$$i2^n - 1|3 \Rightarrow i2^{n+2} - 1|3$$

il en résulte que la formule $\frac{(6a-1)2^{2n+1}-1}{3}$ est vraie pour tout $n$ car l'exposant de 2, ici impair, se maintient dans la même parité.

## 10 Les prédécesseurs de $6a \pm 1$ sont tous différents selon la formule générale $\frac{(6a\pm1)2^n-1}{3}$

Les prédécesseurs de $6a \pm 1$ sont

- soit de la forme $\frac{(6a+1)2^{2n}-1}{3}$ avec $n > 1$ pour $a = 0$, sinon $n > 0$ ;
- soit de la forme $\frac{(6a-1)2^{2n+1}-1}{3}$ avec $a > 0$.

Pour étudier le comportement de la fonction

$$\frac{(6a+1)2^{2n}-1}{3}$$

on peut ignorer la division par 3, ce qui donne

$$(6a+1)2^{2n} - 1$$

et ignorer aussi la soustraction d'une unité, ce qui donne

$$(6a+1)2^{2n}$$

ce qui in fine se réduit à la multiplication d'un nombre par une puissance de 2, soit fondamentalement une fonction à deux variables

$$f(a, n) = a2^n$$

La formule avec $6a-1$ aboutit à la même conclusion, elle s'aparente à la même fonction à deux variables.

Il est facile de voir que tout couple $(a, n)$ donnera un nombre unique, c'est-à-dire que

$$f(a, n) = f(a'n') \Rightarrow a = a' \; et \; n = n'$$

ce qui signifie que si deux nombres issus de la fonction $f$ sont égaux, les paramètres correspondants sont égaux.

En effet l'égalité $a2^n = a'2^{n'}$ exprime l'égalité de deux nombres pairs. Si deux nombres pairs sont égaux, les exposants de leur puissance de 2 sont égaux d'où $n = n'$, ce qui donne $a2^n = a'2^n$ d'où aussi $a = a'$.

Par contraposée, on a

$$(a, n) \neq (a'n') \Rightarrow f(a, n) \neq f(a'n')$$

ce qui signifie que deux couples $(a, n)$ différents donnent des nombres différents par la fonction $f$.

En effet, $(a, n) \neq (a'n')$ signifie soit $a \neq a'$ soit $n \neq n'$. Comme $a2^n$ et $a'2^{n'}$ sont deux nombres pairs, l'inégalité d'un des deux paramètres avec son homologue rend les nombres différents, d'où

$$(a, n) \neq (a', n') \Rightarrow a2^n \neq a'2^{n'}$$

Il en résulte que les nombres issus de la formule

$$\frac{(6a+1)2^{2n}-1}{3}$$

sont tous différents entre eux, ainsi que les nombres issus de l'autre formule

$$\frac{(6a-1)2^{2n+1}-1}{3}$$

D'autre part, un nombre issu de la formule avec $6a+1$ ne peut pas être égal à un nombre issu de la formule avec $6a-1$ du fait de l'inégalité des exposants de leur puissance de 2.

On a donc deux ensembles infinis disjoints dont chacun contient des nombres impairs différents entre eux, et donc leur jonction contient aussi des nombres impairs différents entre eux.

Il en résulte que tous les nombres de la forme $\frac{(6a\pm1)2^n-1}{3}$ sont différents. Comme ces nombres sont les prédécesseurs impairs de nombres de la forme $6a\pm1$, il en résulte que tous les prédécesseurs de nombres de la forme $6a\pm1$ sont différents.

## 11 Tout nombre impair peut s'écrire sous la forme $\frac{(6a\pm1)2^n-1}{3}$

Comme les nombres de la forme $\frac{(6a\pm1)2^n-1}{3}$ sont les prédécesseurs impairs de nombres de la forme $6a \pm 1$

$$\frac{(6a \pm 1)2^n - 1}{3} \leftarrow 6a \pm 1$$

et que ces prédécesseurs sont des nombres impairs quelconques de la forme $2k + 1$,

$$2k + 1 \leftarrow 6a \pm 1$$

il en résulte que tout nombre impair peut s'écrire sous la forme $\frac{(6a \pm 1)2^n - 1}{3}$.

Pour confirmer ce résultat, nous allons établir qu'à tout nombre entier $k$ correspond un couple $(a, n)$ unique, et, réciproquement, qu'à tout couple $(a, n)$ correspond un nombre entier $k$ unique.

## 12 À tout $k$ correspond un couple unique $(a, n)$

Constatons qu'à tout nombre entier $k$ correspond un couple unique $(a, n)$.

$$k \rightarrow (a, n)$$

En effet,

$$k \rightarrow 2k + 1 = i$$

$$i \rightarrow \frac{3i + 1}{2^n} = j$$

$$j \rightarrow 6a \pm 1$$

$$k \rightarrow (a, n)$$

1. Tout $k$ mène au nombre impair $2k + 1 = i$.
2. $i$ mène au nombre pair $3i + 1$.
3. $3i + 1$ qui est pair va être divisé $n$ fois par 2 pour devenir le nombre impair unique $j$, créant ainsi le nombre unique $n$.
4. Ce nombre impair $j$ n'étant pas divisible par 3, il est de la forme $6a \pm 1$, créant ainsi le nombre unique $a$.
5. On crée ainsi un couple unique $(a, n)$ correspondant au nombre quelconque $k$.
6. Donc à tout $k$ correspond un couple unique $(a, n)$.

$$k \to (a, n)$$

## 13 À tout couple $(a, n)$ correspond $k$ unique

Réciproquement, constatons qu'à tout couple $(a, n)$ correspond un nombre entier $k$ unique.

$$(a, n) \to k$$

En effet,

$$Si\ n\ est\ pair,\ j = 6a + 1\ sinon\ j = 6a - 1$$

$$\frac{j2^n - 1}{3} = 2k + 1$$

$$2k + 1 \to k$$

1. On crée le nombre $j$ en fonction de la parité de $n$.
2. Si $n$ est pair, $j = 6a + 1$ sinon $j = 6a - 1$.
3. On crée ensuite le nombre impair $\frac{j2^n - 1}{3} = 2k + 1$
4. La divibilité du numérateur $j2^n - 1$ est assurée par le choix de $6a+1$ ou $6a-1$ en fonction de la parité de $n$, selon l'algorithme présenté précédemment.
5. Le nombre impair $2k + 1$ mène à $k$.
6. Donc tout couple $(a, n)$ mène à $k$.

$$(a, n) \rightarrow k$$

## 14 Exemple

Par exemple, 15 a pour successeur impair 23 :

$$(3 \times 15) + 1 = 46 \; et \; \frac{46}{2} = 23$$

et 23 est de la forme $6a - 1$ : 6(4)-1=23 d'où

$$a = 4.$$

Le nombre de divisions par 2 pour aller de l'impair 15 à l'impair 23 est 1 d'où

$$n = 1.$$

Le nombre impair 15 est donc rattaché au couple unique $(4, 1)$ et s'écrit $\frac{[6(4)-1]2^1-1}{3}$.

$$\frac{[6(4)-1]2^1-1}{3}=\frac{(23)2-1}{3}=\frac{46-1}{3}=\frac{45}{3}=15$$

Réciproquement, le couple $(4,1)$ mène à 15.

1 est un nombre impair donc la formule s'écrit avec $6a-1$ d'où $\frac{[6(4)-1]2^1-1}{3}$ qui donne bien 15.

Ce qui fait que le nombre impair 15 mène au couple unique $(4,1)$, et, réciproquement, que le couple $(4,1)$ mène au nombre impair unique 15.

## 15 Bijection $k \leftrightarrow (a,n)$

Il y a donc une bijection entre tout nombre entier $k$ et son couple $(a,n)$ qui lui correspond.

$$k \leftrightarrow (a,n)$$

Comme tout couple $(a,n)$ exprime une liaison entre un nombre impair quelconque et son successeur impair unique, ou, ce qui revient au même, entre tout successeur impair et l'un de ses prédécesseurs impairs parmi l'infinité de ses prédécesseurs impairs, cette bijection permet de numéroter par l'intermédiaire de son compteur $k$ toutes les liaisons uniques entre nombres impairs.

Voici les premiers liens numérotés avec les formules qui leur correspondent. Dans l'ordre nous avons :

1. Indice k à partir de 0

2. Nombre impair unique correspondant $2k+1$
3. Couple $(a, n)$ unique correspondant au nombre impair $2k+1$
4. Formule unique en fonction de $a$ et $n$ désormais connus dont le résultat donne le nombre impair $2k+1$
5. Liaison finale entre le nombre impair $2k+1$ et son successeur impair unique $6a \pm 1$, l'addition ou la soustraction d'une unité dépendant de la parité de $n$, comme vu précédemment

0 : 1, (0, 2) $\rightarrow \frac{[6(0)+1)].2^2-1}{3} = 1$ d'où $1 \rightarrow 1$

1 : 3, (1, 1) $\rightarrow \frac{[6(1)-1)].2^1-1}{3} = 3$ d'où $3 \rightarrow 5$

2 : 5, (0, 4) $\rightarrow \frac{[6(0)+1)].2^4-1}{3} = 5$ d'où $5 \rightarrow 1$

3 : 7, (2, 1) $\rightarrow \frac{[6(2)-1)].2^1-1}{3} = 7$ d'où $7 \rightarrow 11$

4 : 9, (1, 2) $\rightarrow \frac{[6(1)+1)].2^2-1}{3} = 9$ d'où $9 \rightarrow 7$

5 : 11, (3, 1) $\rightarrow \frac{[6(3)-1)].2^1-1}{3} = 11$ d'où $11 \rightarrow 17$

6 : 13, (1, 3) $\rightarrow \frac{[6(1)-1)].2^3-1}{3} = 13$ d'où $13 \rightarrow 5$

7 : 15, (4, 1) $\rightarrow \frac{[6(4)-1)].2^1-1}{3} = 15$ d'où $15 \rightarrow 23$

8 : 17, (2, 2) $\rightarrow \frac{[6(2)+1)].2^2-1}{3} = 17$ d'où $17 \rightarrow 13$

$9 : 19, (5, 1) \rightarrow \frac{[6(5)-1)].2^1-1}{3} = 19$ d'où $19 \rightarrow 29$

$10 : 21, (0, 6) \rightarrow \frac{[6(0)+1)].2^6-1}{3} = 21$ d'où $21 \rightarrow 1$

$11 : 23, (6, 1) \rightarrow \frac{[6(6)-1)].2^1-1}{3} = 23$ d'où $23 \rightarrow 35$

$12 : 25, (3, 2) \rightarrow \frac{[6(3)+1)].2^2-1}{3} = 25$ d'où $25 \rightarrow 19$

$13 : 27, (7, 1) \rightarrow \frac{[6(7)-1)].2^1-1}{3} = 27$ d'où $27 \rightarrow 41$

$14 : 29, (2, 3) \rightarrow \frac{[6(2)-1)].2^3-1}{3} = 29$ d'où $29 \rightarrow 11$

$15 : 31, (8, 1) \rightarrow \frac{[6(8)-1)].2^1-1}{3} = 31$ d'où $31 \rightarrow 47$

$16 : 33, (4, 2) \rightarrow \frac{[6(4)+1)].2^2-1}{3} = 33$ d'où $33 \rightarrow 25$

$17 : 35, (9, 1) \rightarrow \frac{[6(9)-1)].2^1-1}{3} = 35$ d'où $35 \rightarrow 53$

$18 : 37, (1, 4) \rightarrow \frac{[6(1)+1)].2^4-1}{3} = 37$ d'où $37 \rightarrow 7$

$19 : 39, (10, 1) \rightarrow \frac{[6(10)-1)].2^1-1}{3} = 39$ d'où $39 \rightarrow 59$

$20 : 41, (5, 2) \rightarrow \frac{[6(5)+1)].2^2-1}{3} = 41$ d'où $41 \rightarrow 31$

$21 : 43, (11, 1) \rightarrow \frac{[6(11)-1)].2^1-1}{3} = 43$ d'où $43 \rightarrow 65$

$22 : 45, (3, 3) \rightarrow \frac{[6(3)-1)].2^3-1}{3} = 45$ d'où $45 \rightarrow 17$

$23 : 47, (12, 1) \rightarrow \frac{[6(12)-1)].2^1-1}{3} = 47$ d'où $47 \rightarrow 71$

$24 : 49, (6, 2) \rightarrow \frac{[6(6)+1)].2^2-1}{3} = 49$ d'où $49 \rightarrow 37$

$25 : 51,\ (13,\ 1) \rightarrow \frac{[6(13)-1)].2^1-1}{3} = 51$ d'où $51 \rightarrow 77$

$26 : 53,\ (1,\ 5) \rightarrow \frac{[6(1)-1)].2^5-1}{3} = 53$ d'où $53 \rightarrow 5$

$27 : 55,\ (14,\ 1) \rightarrow \frac{[6(14)-1)].2^1-1}{3} = 55$ d'où $55 \rightarrow 83$

$28 : 57,\ (7,\ 2) \rightarrow \frac{[6(7)+1)].2^2-1}{3} = 57$ d'où $57 \rightarrow 43$

$29 : 59,\ (15,\ 1) \rightarrow \frac{[6(15)-1)].2^1-1}{3} = 59$ d'où $59 \rightarrow 89$

$30 : 61,\ (4,\ 3) \rightarrow \frac{[6(4)-1)].2^3-1}{3} = 61$ d'où $61 \rightarrow 23$

$31 : 63,\ (16,\ 1) \rightarrow \frac{[6(16)-1)].2^1-1}{3} = 63$ d'où $63 \rightarrow 95$

$32 : 65,\ (8,\ 2) \rightarrow \frac{[6(8)+1)].2^2-1}{3} = 65$ d'où $65 \rightarrow 49$

$33 : 67,\ (17,\ 1) \rightarrow \frac{[6(17)-1)].2^1-1}{3} = 67$ d'où $67 \rightarrow 101$

$34 : 69,\ (2,\ 4) \rightarrow \frac{[6(2)+1)].2^4-1}{3} = 69$ d'où $69 \rightarrow 13$

$35 : 71,\ (18,\ 1) \rightarrow \frac{[6(18)-1)].2^1-1}{3} = 71$ d'où $71 \rightarrow 107$

$36 : 73,\ (9,\ 2) \rightarrow \frac{[6(9)+1)].2^2-1}{3} = 73$ d'où $73 \rightarrow 55$

$37 : 75,\ (19,\ 1) \rightarrow \frac{[6(19)-1)].2^1-1}{3} = 75$ d'où $75 \rightarrow 113$

$38 : 77,\ (5,\ 3) \rightarrow \frac{[6(5)-1)].2^3-1}{3} = 77$ d'où $77 \rightarrow 29$

$39 : 79,\ (20,\ 1) \rightarrow \frac{[6(20)-1)].2^1-1}{3} = 79$ d'où $79 \rightarrow 119$

$40 : 81,\ (10,\ 2) \rightarrow \frac{[6(10)+1)].2^2-1}{3} = 81$ d'où $81 \rightarrow 61$

41 : 83, (21, 1) $\rightarrow \frac{[6(21)-1)].2^1-1}{3} = 83$ d'où 83 $\rightarrow$ 125

42 : 85, (0, 8) $\rightarrow \frac{[6(0)+1)].2^8-1}{3} = 85$ d'où 85 $\rightarrow$ 1

43 : 87, (22, 1) $\rightarrow \frac{[6(22)-1)].2^1-1}{3} = 87$ d'où 87 $\rightarrow$ 131

44 : 89, (11, 2) $\rightarrow \frac{[6(11)+1)].2^2-1}{3} = 89$ d'où 89 $\rightarrow$ 67

45 : 91, (23, 1) $\rightarrow \frac{[6(23)-1)].2^1-1}{3} = 91$ d'où 91 $\rightarrow$ 137

46 : 93, (6, 3) $\rightarrow \frac{[6(6)-1)].2^3-1}{3} = 93$ d'où 93 $\rightarrow$ 35

47 : 95, (24, 1) $\rightarrow \frac{[6(24)-1)].2^1-1}{3} = 95$ d'où 95 $\rightarrow$ 143

48 : 97, (12, 2) $\rightarrow \frac{[6(12)+1)].2^2-1}{3} = 97$ d'où 97 $\rightarrow$ 73

49 : 99, (25, 1) $\rightarrow \frac{[6(25)-1)].2^1-1}{3} = 99$ d'où 99 $\rightarrow$ 149

50 : 101, (3, 4) $\rightarrow \frac{[6(3)+1)].2^4-1}{3} = 101$ d'où 101 $\rightarrow$ 19

Ce qui revient in fine à lister dans l'ordre tous les liens possibles entre un nombre impair et son successeur impair unique.

1 $\rightarrow$ 1
3 $\rightarrow$ 5
5 $\rightarrow$ 1
7 $\rightarrow$ 11
9 $\rightarrow$ 7
11 $\rightarrow$ 17
13 $\rightarrow$ 5

$15 \to 23$

$17 \to 13$

$19 \to 29$

$21 \to 1$

$23 \to 35$

$25 \to 19$

$27 \to 41$

$29 \to 11$

$31 \to 47$

$33 \to 25$

$35 \to 53$

$37 \to 7$

$39 \to 59$

$41 \to 31$

$43 \to 65$

$45 \to 17$

$47 \to 71$

$49 \to 37$

$51 \to 77$

$53 \to 5$

$55 \to 83$

$57 \to 43$

$59 \to 89$

$61 \to 23$

$63 \to 95$

$65 \to 49$

$67 \to 101$

$69 \to 13$

$71 \to 107$

$73 \to 55$

$75 \to 113$

$77 \to 29$

$79 \to 119$

$81 \to 61$

$83 \to 125$

$85 \to 1$

$87 \to 131$

$89 \to 67$

$91 \to 137$

$93 \to 35$

$95 \to 143$

$97 \to 73$

$99 \to 149$

$101 \to 19$

$103 \to 155$

$105 \to 79$

$107 \to 161$

$109 \to 41$

$111 \to 167$

$113 \to 85$

$115 \to 173$

$117 \to 11$

$119 \to 179$

$121 \to 91$

$123 \to 185$

$125 \to 47$

$127 \to 191$

$129 \to 97$

$131 \to 197$

$133 \to 25$

$135 \to 203$

$137 \to 103$

$139 \to 209$

$141 \to 53$

$143 \to 215$

$145 \to 109$

$147 \to 221$

$149 \to 7$

$151 \to 227$

$153 \to 115$

$155 \to 233$

$157 \to 59$

$159 \to 239$

$161 \to 121$

$163 \to 245$

$165 \to 31$

$167 \to 251$

$169 \to 127$

$171 \to 257$

$173 \to 65$

$175 \to 263$

$177 \to 133$
$179 \to 269$
$181 \to 17$
$183 \to 275$
$185 \to 139$
$187 \to 281$
$189 \to 71$
$191 \to 287$
$193 \to 145$
$195 \to 293$
$197 \to 37$
$199 \to 299$

## 16 Algorithme

On peut également décrire le processus par un algorithme élémentaire.

À partir de la liste infinie de type $p \to s$, on attache les nombres petit à petit à l'arborescence, on choisit le premier disponible dans la liste relue à chaque occurrence depuis le début. Pour que l'insertion soit possible, il faut que le couple lu ne soit pas encore présent dans l'arborescence et que le successeur du couple corresponde à un prédécesseur présent dans l'arborescence. On sait alors que ce successeur doit être attaché au niveau suivant, qu'on crée s'il n'existe pas encore.

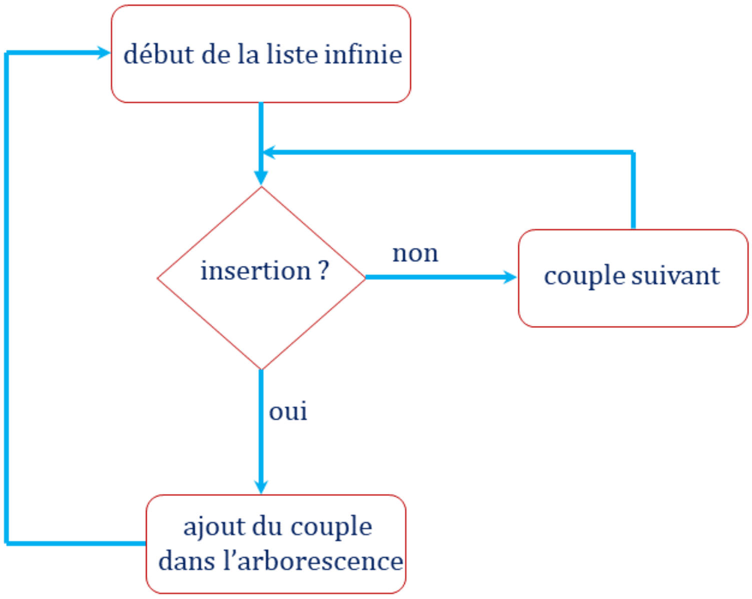


Figure 3 – Arborescence simplifiée à partir de la racine unité

Voici ce à quoi ressemble une telle arborescence dans sa version numérique. Tout $p$ d'un couple est rattaché à un couple du niveau inférieur par son $s$ qui l'emmène à chaque fois au niveau inférieur jusqu'à la racine unité.

Niveau 0 : 1

Niveau 1 : 2-1

Niveau 2 : 4-2

Niveau 3 : 8-4

Niveau 4 : 16-8

Niveau 5 : 5-16 32-16

Niveau 6 : 10-5 64-32

Niveau 7 : 3-10 20-10 21-64 128-64

Niveau 8 : 6-3 40-20 42-21 256-128

Niveau 9 : 12-6 13-40 80-40 84-42 85-256 512-256

Niveau 10 : 24-12 26-13 160-80 168-84 170-85

Niveau 11 : 48-24 52-26 53-160 320-160 336-168 340-170

Niveau 12 : 17-52 96-48 104-52 106-53 113-340

Niveau 13 : 34-17 35-106 192-96 208-104 212-106 226-113

Niveau 14 : 11-34 68-34 70-35 69-208 75-226 384-192 416-208 424-212 452-226

Niveau 15 : 22-11 136-68 23-70 140-70 138-69 150-75 141-424

Niveau 16 : 7-22 44-22 45-136 46-23 272-136 276-138 280-140 300-150 282-141

Niveau 17 : 14-7 88-44 90-45 15-46 92-46 93-280 544-272 552-276 560-280 564-282

Niveau 18 : 28-14 29-88 30-15 176-88 180-90 184-92 186-93 181-544

Niveau 19 : 9-28 56-28 58-29 60-30 61-184 352-176 360-180 368-184 372-186 362-181

Niveau 20 : 18-9 19-58 112-56 116-58 120-60 122-61 117-352

Niveau 21 : 36-18 38-19 37-112 224-112 232-116 240-120 244-122 234-117

Niveau 22 : 72-36 76-38 74-37 77-232 81-244 448-224 464-232 468-234 480-240 488-244

Niveau 23 : 25-76 144-72 148-74 152-76 154-77 162-81 149-448

Niveau 24 : 50-25 49-148 51-154 288-144 296-148 304-

152 308-154 324-162 298-149

Niveau 25 : 100-50 98-49 102-51 101-304 99-298

Niveau 26 : 33-100 196-98 200-100 204-102 202-101 198-99

Niveau 27 : 66-33 65-196 67-202 392-196 400-200 404-202 408-204 396-198

Niveau 28 : 132-66 130-65 134-67 133-400

Niveau 29 : 43-130 260-130 264-132 268-134 266-133

Niveau 30 : 86-43 89-268 520-260 528-264 532-266 536-268

Niveau 31 : 172-86 178-89 173-520 177-532

Niveau 32 : 57-172 59-178 344-172 356-178 346-173 354-177

Niveau 33 : 114-57 118-59 115-346

Niveau 34 : 228-114 39-118 236-118 230-115

Niveau 35 : 78-39 456-228 472-236 460-230

Niveau 36 : 156-78 157-472 153-460

Niveau 37 : 312-156 314-157 306-153

Voici une autre présentation ne faisant intervenir que les nombres impairs.

Niveau 0 : 1

Niveau 1 : 5-1 21-1 85-1 341-1 1365-1

Niveau 2 : 3-5 13-5 53-5 113-85 213-5 227-341 453-85 853-5 909-341 1813-85

Niveau 3 : 17-13 35-53 69-13 75-113 141-53 277-13 301-113 151-227 565-53 605-227 1109-13 1137-853 1205-113 2261-53 2417-1813 2421-227

Niveau 4 : 11-17 45-17 23-35 93-35 181-17 201-151 369-277 373-35 401-301 403-605 725-17 753-565 805-151 739-1109 803-1205 1477-277 1493-35 1605-301 1613-605 1507-2261 1611-2417

Niveau 5 : 7-11 29-11 15-23 61-23 117-11 241-181 245-23 267-401 469-11 497-373 537-403 483-725 965-181 981-23 1069-401 1073-805 985-739 535-803 995-1493 1075-1613 1877-11 1933-725 1969-1477 1989-373 2141-803 2149-403 2009-1507

Niveau 6 : 9-7 19-29 37-7 77-29 81-61 149-7 163-245 309-29 321-241 325-61 331-497 597-7 625-469 653-245 643-965 715-1073 713-535 1237-29 1285-241 1301-61 1313-985 1325-497 1425-1069 663-995 1433-1075 1251-1877 1427-2141 1339-2009 2389-7 2501-469 2573-965 2577-1933 2613-245

Niveau 7 : 25-19 49-37 51-77 101-19 99-149 197-37 205-77 217-163 397-149 405-19 433-325 441-331 435-653 789-37 821-77 833-625 869-163 857-643 953-715 475-713

867-1301 875-1313 883-1325 1589-149 955-1433 1621-19 1649-1237 1713-1285 1733-325 1741-653 1765-331 1901-713 951-1427 1785-1339 1667-2501 1715-2573

Niveau 8 : 33-25 65-49 67-101 133-25 131-197 261-49 269-101 273-205 289-217 525-197 529-397 533-25 577-433 547-821 555-833 579-869 571-857 1045-49 635-953 1077-101 1093-205 1157-217 633-475 583-875 1177-883 1059-1589 1273-955 1099-1649 1155-1733 1267-1901 2101-197 2117-397 2133-25 2161-1621 2189-821 2221-833 2285-857 2309-433 2317-869 2321-1741 2333-875 2353-1765 1111-1667 2533-475 2541-953 1143-1715

Niveau 9 : 43-65 89-67 173-65 177-133 87-131 179-269 349-131 357-67 385-289 355-533 693-65 705-529 709-133 717-269 769-577 729-547 761-571 423-635 771-1157 777-583 1393-1045 1397-131 1421-533 1429-67 1457-1093 1541-289 1569-1177 1465-1099 1693-635 1697-1273 1689-1267 1411-2117 1459-2189 1523-2285 1539-2309 1547-2321 1555-2333 1481-1111

Niveau 10 : 57-43 59-89 115-173 229-43 237-89 119-179 461-173 465-349 477-179 513-385 473-355 917-43 945-709 949-89 507-761 1025-769 931-1397 947-1421 971-1457 1027-1541 1131-1697 1845-173 1857-1393 1861-349 1893-355 1905-1429 1909-179 1953-1465 2029-761 2053-385 1881-1411 1945-1459 2257-1693 1015-1523 1031-1547 2073-1555 987-1481

Niveau 11 : 39-59 157-59 153-115 79-119 305-229 317-119 307-461 315-473 613-115 629-59 611-917 683-1025

1221-229 1229-461 1261-473 1265-949 1269-119 1241-931 631-947 647-971 1369-1027 1353-1015 687-1031 2445-917 2453-115 2481-1861 2517-59 2525-947 2545-1909 2589-971 2593-1945

Niveau 12 : 209-157 105-79 203-305 211-317 421-79 409-307 419-629 813-305 817-613 837-157 845-317 407-611 455-683 819-1229 843-1265 827-1241 841-631 431-647 1629-611 1637-307 1677-629 1681-1261 1685-79 1725-647 1821-683 1825-1369 1635-2453 1683-2525

Niveau 13 : 139-209 135-203 281-211 541-203 545-409 557-209 561-421 279-419 563-845 271-407 303-455 1085-407 1089-817 1117-419 1125-211 1213-455 551-827 1121-841 287-431 1149-431 1091-1637 1123-1685 2165-203 2181-409 2205-827 2229-209 2241-1681 2245-421 2253-845 2433-1825

Niveau 14 : 185-139 187-281 363-545 371-557 721-541 741-139 749-281 375-563 361-271 723-1085 367-551 747-1121 1445-271 1453-545 191-287 765-287 1469-551 1485-557 1489-1117 1501-563 1617-1213 727-1091 1497-1123 1443-2165

Niveau 15 : 123-185 249-187 493-185 247-371 499-749 481-361 961-721 989-371 997-187 489-367 963-1445 127-191 509-191 979-1469 969-727 1925-361 1937-1453 1957-367 1973-185 1985-1489 1997-749 2001-1501 2037-191

Niveau 16 : 329-247 657-493 665-499 641-481 659-989 1281-961 1317-247 1329-997 169-127 339-509 677-

127 1357-509 1305-979 1283-1925 1291-1937 1315-1973 1323-1985 1331-1997 2565-481 2609-1957

Niveau 17 : 219-329 443-665 877-329 427-641 439-659 225-169 451-677 901-169 1709-641 1757-659 1773-665 1805-677 1809-1357 855-1283 1721-1291 1753-1315 887-1331 1739-2609

Niveau 18 : 295-443 569-427 585-439 1169-877 1181-443 601-451 1201-901 1139-1709 1171-1757 1203-1805 1147-1721 591-887 2277-427 2337-1753 2341-439 2365-887 2405-451 1159-1739

Niveau 19 : 393-295 379-569 779-1169 787-1181 801-601 1517-569 1573-295 1601-1201 759-1139 1561-1171 1529-1147 1603-2405 1545-1159

Niveau 20 : 505-379 519-779 1049-787 1011-1517 1067-1601 1019-1529 2021-379 2077-779 2081-1561 2097-1573 2137-1603

Niveau 21 : 673-505 699-1049 711-1067 679-1019 1347-2021 1387-2081

Niveau 22 : 897-673 905-679 1849-1387

Niveau 23 : 603-905 2413-905 2465-1849

Niveau 24 : 1643-2465

Niveau 25 : 1095-1643

## 17 Processus de création des nombres

Tout nombre impair est de la forme $\frac{(6a\pm1)2^n-1}{3}$ et a pour successeur impair unique le nombre $6a \pm 1$ de la formule. Les impairs divisibles par 3 n'ont pas de prédécesseurs impairs, ils sont en fin de course dans l'arborescence. Les autres impairs, donc non divisibles par 3, sont de la forme $6a \pm 1$ et sont, à ce titre, réinjectés à l'infini dans la formule.

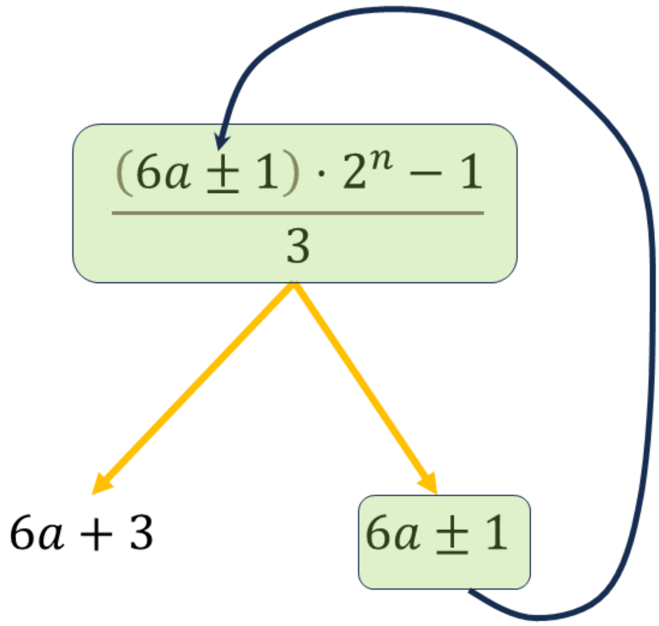


FIGURE 4 – Processus de création des nombres impairs connectés à l'infini

## 18 Conclusion

L'arborescence à partir du 1 initial est à successeur unique. Il est possible de construire une section commençante de l'arborescence infinie de longueur arbitraire. Tout couple $(a, n)$ relie deux nombres impairs deux à deux. Le successeur unique est lié à une infinité de prédécesseurs impairs faisant partie de la même infinité de nombres impairs dont l'équation est connue. On obtient toujours un exposant sur trois de la puissance de 2 donnant des nombres impairs divisibles par 3, donc en fin de course dans l'arborescence, et les deux autres exposants de la puissance de 2 donnant des nombres impairs non divisibles par 3, et donc, à ce titre, réinjectables dans la formule pour obtenir une nouvelle infinité d'impairs du niveau supérieur dans l'arborescence qui se construit ainsi. Chaque infinité de ce genre est unique et correspond à un seul successeur. Chaque paramètre $a$ lié à une parité de $n$ crée une formule unique correspondant à une structure infinie où le successeur impair unique est relié à cette infinité de prédécesseurs impairs. Chaque couple est unique et relie deux nombres impairs dans le sens successeur, il a une place fixe dans l'arborescence infinie. Le nombre $a$ lié à la parité de $n$ indique à quelle formule appartient ce couple et donc à quelle infinité unique appartient la structure $p \to s$. Cette structrure où un successeur est relié à l'infinité de ses prédécesseurs impairs est unique et a une place unique dans l'arborescence infinie.

* *

*